

4-28-2018

## Algorithms of stable control of a matrix object in the conditions of parametric uncertainty

U.F Mamirov

*Doctoral student of the department "Information Processing Systems and Management", Tashkent State Technical University, Tel.: (90) 900-56-25,, uktammamirov@gmail.com*

Follow this and additional works at: <https://ijctcm.researchcommons.org/journal>

 Part of the [Engineering Commons](#)

---

### Recommended Citation

Mamirov, U.F (2018) "Algorithms of stable control of a matrix object in the conditions of parametric uncertainty," *Chemical Technology, Control and Management*: Vol. 2018: Iss. 1, Article 27.

DOI: <https://doi.org/10.34920/2018.1-2.164-168>

This Article is brought to you for free and open access by Chemical Technology, Control and Management. It has been accepted for inclusion in Chemical Technology, Control and Management by an authorized editor of Chemical Technology, Control and Management. For more information, please contact [app-tgtu@mail.ru](mailto:app-tgtu@mail.ru).

---

## Algorithms of stable control of a matrix object in the conditions of parametric uncertainty

### Cover Page Footnote

Tashkent State Technical University, SSC «UZSTROYMATERIALY», SSC «UZKIMYOSANOAT», JV «SOVPLASTITAL», Agency on Intellectual Property of the Republic of Uzbekistan



ISSN 1815-4840

Himičeskaâ tehnologiâ. Kontrol' i upravlenie

**CHEMICAL TECHNOLOGY.  
CONTROL AND MANAGEMENT**2018, №1-2 (79-80) pp.164-168. <https://doi.org/10.34920/2018.1-2.164-168>International scientific and technical journal  
journal homepage: <https://uzjournals.edu.uz/ijctcm/>

Since 2005

УДК 62-506.15

У.Ф.МАМИРОВ (ТГТУ)

**АЛГОРИТМЫ СТАБИЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ МАТРИЧНЫМ ОБЪЕКТОМ В УСЛОВИЯХ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ**

*Параметрик ноаниқлик шароитидаги матрицавий объектларни барқарор бошқарув алгоритмларини формаллаштириш саволлари кўрилган. Матрицаларга мавҳум мурожжат қилиш усулларидан фойдаланиб, кўрилатган объектни бошқариш алгоритми келтирилган. Матрицаларга мавҳум мурожжатларни ҳисоблаш учун чегаралаш усули асосидаги рекуррент алгоритмлардан фойдаланилган. Келтирилган ушбу муносабатлар бошқарув алгоритмидаги матрицанинг рекуррент мавҳум мурожжати амалга оширишни ва шу билан биргаликда ноаниқлик шароитидаги матрицавий объектларни адаптив бошқариш тизимларининг бошқарув таъсирларини амалга оширишга ёрдам беради.*

**Таянч сўзлар:** матрицавий бошқарув объекти, параметрик ноаниқлик, матрицаларга мавҳум мурожжат.

*Рассматриваются вопросы формирования алгоритмов стабильного управления матричным объектом в условиях параметрической неопределенности. Приводятся алгоритмы управления рассматриваемым объектом с использованием процедуры псевдообращения матриц. Для этого используются рекуррентные алгоритмы, основанные на методе окаймления. Приведенные соотношения позволяют осуществлять рекуррентное псевдообращение матриц в алгоритме управления и тем самым реализовать управляющие воздействия в адаптивной системе управления матричным объектом в условиях неопределенности.*

**Ключевые слова:** матричный объект управления, параметрическая неопределенность, псевдообращение матриц.

*The problems of forming algorithms for stable control of a matrix object under conditions of parametric uncertainty are considered. Algorithms for managing the object under consideration using the matrix pseudoinversion procedure are given. Recurrent algorithms based on the fringing method are used for pseudo-inversion of matrices. These relations allow us to implement recurrent pseudo-inversion of matrices in the control algorithm and, thereby, realize control actions in the adaptive control system of the matrix object under uncertainty conditions.*

**Key words:** matrix control object, parametric uncertainty, pseudo-inversion of matrices.

Повышение требований к качеству функционирования современных технических и технологических систем приводят к необходимости разработки адаптивных методов управления, позволяющих осуществить оптимизацию процессов управления и обеспечить работоспособность системы управления при широких вариациях статических и динамических характеристик объекта. При реализации различных принципов адаптивного управления объектом встает вопрос о том, каким образом выбирать параметры регуляторов координатного и параметрического управления и устройств адаптации, изменяющих параметры регуляторов и наблюдателя [1-4]. При решении разнообразных задач описания объектов и синтеза адаптивных систем управления в условиях неопределенности получили распространение матричные разностные уравнения вида [5,6]

$$x_k = \Phi(x_{k-1}, k), \quad x(0) = x_0, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (1)$$

где  $x_k$  –  $(m \times n)$ -матрица состояний,  $k$  – текущее дискретное время,  $\Phi(\cdot)$  – некоторое функциональное преобразование.

Целесообразность представления (1) помимо соображений компактности записи имеет и другое более серьезное основание. Применяя известные процедуры векторизации можно привести

исходное описание к традиционной векторной форме и далее использовать известный аппарат теории адаптивных систем управления. Дело в том, что реализация представления (1) при помощи имеющихся в настоящее время «скалярных» процессоров в стандартных ЭВМ при достаточно большом числе элементов матрицы требует выполнения огромного числа операций умножения и в большинстве случаев исключает возможность реализации его в реальном масштабе времени. В то же время представление (1) допускает реализацию его при помощи разрабатываемых в настоящее время так называемых «матричных» процессоров, для которых операции над матрицами являются элементарными [5,6]. В таких случаях становится целесообразным использование матричного настраиваемого упредителя, параметры которого уточняются с помощью адаптивного матричного алгоритма идентификации и, соответственно, матричного алгоритма управления.

Рассмотрим задачу синтеза адаптивной системы управления матричным линейным объектом в дискретном времени

$$x_k = Ax_{k-1}B \quad (2)$$

с  $(m \times m)$  - и  $(n \times n)$ -матрицами неизвестных параметров  $A$  и  $B$  соответственно. При этом в соответствии объекту ставится настраиваемая модель (упредитель)

$$\hat{x}_k = A_{k-1}x_{k-1}B_{k-1}, \quad (3)$$

параметры которой, входящие в матрицы  $A_{k-1}$  и  $B_{k-1}$ , уточняются в реальном времени с помощью адаптивного идентификатора [7,8]. Необходимо получить оценки  $A_k$  и  $B_k$  и найти управляющие воздействия  $u_k$ , обеспечивающие близость в некотором смысле последовательности  $x_k$  к желаемой траектории движения объекта  $y_k$ .

Объект управления (2) и настраиваемую модель (3) запишем в векторной форме

$$\begin{aligned} \bar{x}_k &= \bar{x}_{k-1}(B \otimes A^T) = \bar{x}_{k-1}R, \\ \hat{\bar{x}}_k &= \bar{x}_{k-1}(B_{k-1} \otimes A_{k-1}^T) = \bar{x}_{k-1}R_{k-1}, \end{aligned}$$

где  $\bar{x}_k$  – результат строчной векторизации матрицы  $x_k$ ,  $\otimes$  – символ кронекерова произведения,  $T$  – знак транспонирования.

Тогда, следуя [6] алгоритм идентификации можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} A_k &= A_{k-1} + (\text{tr } v_k B_{k-1}^T x_{k-1}^T x_{k-1} B_{k-1} v_k^T) \times \\ &\times (\text{tr } v_k B_{k-1}^T x_{k-1}^T x_{k-1} B_{k-1} B_{k-1}^T x_{k-1}^T x_{k-1} B_{k-1} v_k^T)^{-1} v_k B_{k-1}^T x_{k-1}^T, \\ B_k &= B_{k-1} + (\text{tr } v_{A,k}^T A_k x_{k-1} x_{k-1}^T A_k^T v_{A,k}) \times \\ &\times (\text{tr } A_k x_{k-1} x_{k-1}^T A_k^T v_{A,k} v_{A,k}^T A_k x_{k-1} x_{k-1}^T A_k^T)^{-1} x_{k-1}^T A_k^T v_{A,k} \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} v_k &= x_k - A_{k-1}x_{k-1}B_{k-1}, \\ v_{A,k} &= x_k - A_k x_{k-1} B_{k-1}, \\ v_{B,k} &= x_k A_k x_{k-1} B_k. \end{aligned}$$

Задачу синтеза регулятора рассмотрим на примере управляемого матричного объекта [5]

$$x_k = Ax_{k-1}B + Cu_{k-1}D,$$

в соответствие которому ставится настраиваемая модель

$$\hat{x}_k = A_{k-1}x_{k-1}B_{k-1} + C_{k-1}u_{k-1}D_{k-1},$$

где  $u_{k-1}$  –  $(s \times r)$  – матрица управляющих воздействий,  $C, C_{k-1}, D, D_{k-1}$  –  $(m \times s)$  -,  $(r \times n)$ -

матрицы истинных параметров и оценок,

$$\tilde{A}_{k-1} = \begin{bmatrix} A_{k-1} & 0 \\ 0 & C_{k-1} \end{bmatrix}, \quad \tilde{B}_{k-1} = \begin{bmatrix} B_{k-1} & 0 \\ 0 & D_{k-1} \end{bmatrix},$$

$$\tilde{x}_{k-1} = \begin{bmatrix} x_{k-1} & 0 \\ 0 & u_{k-1} \end{bmatrix}.$$

Используя методику синтеза адаптивных систем [6-8] в качестве критерия управления примем функцию удельных потерь  $J_t = tr(y_{k+1} - \hat{x}_{k+1})Q_1(y_{k+1} - x_{k+1})^T$  с учетом ограничений на область допустимых управлений, задаваемых в форме  $tru_k Q_2 u_k^T \leq U^2$ . Здесь:  $y_{k+1}$  – некоторая априори заданная матричная траектория желаемого движения объекта,  $Q_1$  и  $Q_2$  – положительно определенные весовые ( $n \times n$ )- и ( $r \times r$ )- матрицы.

Будем полагать, что ранг матрицы  $C_{k-1}$  размерности  $m \times s$  с  $m \geq s$  равен  $s$ , а ранг матрицы  $D_{k-1}$  размерности  $r \times n$  с  $r \leq n$  равен  $r$ . Тогда, полагая, что ограничения на область допустимых управлений отсутствуют, то есть  $Q_2 = 0$ , и  $Q_1 = I_n$ , можно получить следующее соотношение для управления [6]

$$u_k = (C_{k-1}^T C_{k-1})^{-1} C_{k-1}^T (y_{k+1} - A_{k-1} x_k B_{k-1}) D_{k-1}^T (D_{k-1} D_{k-1}^T)^{-1},$$

или

$$u_k = C_{k-1}^+ (y_{k+1} - A_{k-1} x_k B_{k-1}) D_{k-1}^+ \quad (5)$$

Для формирования управления на основе (5) целесообразно использовать рекуррентные формулы для псевдообращения матриц  $C_{k-1}$  и  $D_{k-1}$ . На основе теории и методов псевдообращения матриц [9-14] приведем алгоритм псевдообращения для матрицы  $C_{k-1}$ , который может быть использован и при вычислении псевдообратной матрицы  $D_{k-1}^+$ .

Известно [10,13], что для каждой действительной ( $m \times s$ )-матрицы  $C$  существует единственная действительная псевдообратная матрица  $U$ , удовлетворяющая следующим свойствам:

$$UCU = U, (CU)^T = CU, CUC = C, (UC)^T = UC \quad (6)$$

На практике нередки случаи, когда дополнительная информация в виде ( $s \times 1$ )-матрицы  $C_{k-1,m+1}$  присоединяется к имеющейся ( $m \times s$ )-матрице  $C_{k-1,m}$  в качестве ее последней строки, так что вновь образовавшаяся матрица  $C_{k-1,m+1}$  может быть представлена в форме

$$C_{k-1,m+1} = \begin{bmatrix} C_{k-1,m} \\ \tilde{c}_{k-1,m+1} \end{bmatrix} \quad (7)$$

Известно [11,12], что псевдообратная матрица  $U_{k-1,m+1}$  для матрицы  $C_{k-1,m+1}$  в форме (7) может быть представлена в виде

$$U_{k-1,m+1} = \left\| \begin{matrix} V_{k-1,m}^T \\ v_{k-1,m+1} \end{matrix} \right\|, \quad (8)$$

где

$$V_{k-1,m}^T = U_{k-1,m} - v_{k-1,m+1} c_{k-1,m+1}^T U_{k-1,m}.$$

Из первого соотношения (6) используя разбиение  $U_{k-1,m+1}$  в форме (8) можно записать

$$U_{k-1,m+1} = U_{k-1,m+1} C_{k-1,m+1} U_{k-1,m+1} = [V_{k-1,m}^T C_{k-1,m} + v_{k-1,m+1} c_{k-1,m+1}^T] U_{k-1,m+1}. \quad (9)$$

Отсюда

$$I = V_{k-1,m}^T C_{k-1,m} + v_{k-1,m+1} c_{k-1,m+1}^T.$$

На основе (9) находим  $U_{k-1,m} C_{k-1,m} = V_{k-1,m}^T C_{k-1,m} + v_{k-1,m+1} c_{k-1,m+1}^T U_{k-1,m} C_{k-1,m}$ , откуда можно прийти к выражению

$$V_{k-1,m}^T = U_{k-1,m} - v_{k-1,m+1} c_{k-1,m+1}^T U_{k-1,m}, \quad (10)$$

Подставляя (10) в (8), находим

$$U_{k-1,m+1} = U_{k-1,m} - v_{k-1,m+1} c_{k-1,m+1}^T U_{k-1,m} : v_{k-1,m+1}, \quad (11)$$

для  $m = 1$  имеем  $U_{k-1,1} = (c_{k-1,1}^T c_{k-1,1})^{-1} c_{k-1,1}$ .

При использовании алгоритма (11) могут быть два случая. Возможен случай, когда строка:  $c_{k-1,m+1}^T$  не увеличивает ранга матрицы  $C_{k-1,m}$ . Тогда можно  $v_{k-1,m+1}$  определить из выражения [9,11]

$$v_{k-1,m+1}^T = (c_{k-1,m+1}^T U_{k-1,m} U_{k-1,m}^T c_{k-1,m+1} + 1)^{-1} c_{k-1,m+1}^T U_{k-1,m} U_{k-1,m}^T. \quad (12)$$

Вводя обозначение

$$S_{k-1,m} = U_{k-1,m} U_{k-1,m}^T = (C_{k-1,m}^T C_{k-1,m})^{-1} \quad (13)$$

и, подставляя (13) в (12) и транспонируя, находим

$$v_{k-1,m+1} = S_{k-1,m} c_{k-1,m+1} (c_{k-1,m+1}^T S_{k-1,m} c_{k-1,m+1} + 1)^{-1}.$$

В этом случае матрица  $S_{k-1,m}$  определяется выражением

$$S_{k-1,m+1} = S_{k-1,m} - v_{k-1,m+1} c_{k-1,m+1}^T S_{k-1,m},$$

В случае, когда строка  $c_{k-1,m+1}^T$  увеличивает ранг матрицы  $C_{k-1,m}$ , столбец  $v_{k-1,m+1}$  можно определить на основе выражения [10,12]

$$v_{k-1,m+1} = (I - U_{k-1,m}^T C_{k-1,m}^T) c_{k-1,m+1} [c_{k-1,m+1}^T (I - U_{k-1,m}^T C_{k-1,m}^T) c_{k-1,m+1}]^{-1}.$$

Вводя обозначение

$$T_{k-1,m} = I - U_{k-1,m}^T C_{k-1,m}^T$$

находим

$$v_{k-1,m+1} = T_{k-1,m} c_{k-1,m+1} (c_{k-1,m+1}^T T_{k-1,m} c_{k-1,m+1})^{-1}.$$

В этом случае матрицу  $T_{k-1,m}$  можно определить следующим образом

$$T_{k-1,m+1} = T_{k-1,m} - v_{k-1,m+1} c_{k-1,m+1}^T T_{k-1,m}.$$

при  $m = 1$  имеем  $T_{k-1,1} = I - U_{k-1,1} C_{k-1,1}$ .

В выражениях (7)-(13)  $U_{k-1,m+1}$  – псевдообратная матрица для матрицы, составленной из первых  $m+1$  строк исходной;  $c_{k-1,m+1}^T$  есть  $(m+1)$ -я строка исходной матрицы;  $v_{k-1,m+1}$  есть  $(m+1)$ -й столбец псевдообратной матрицы;  $T_{k-1,m+1}$ ,  $S_{k-1,m+1}$  – симметрические матрицы связи вектор-столбца  $v_{k-1,m+1}$  с вектор-строкой  $c_{k-1,m+1}^T$ ;  $I$  – единичная матрица;  $T$  – знак транспонирования;

∴ – знак отделения  $m$  столбцов матрицы  $U_{k-1,m+1}$  от  $(m+1)$ -го столбца.

Рассмотренный алгоритм псевдообращения является прямым и использует преимущества, свойственные методу окаймления [9,11]. При использовании данного алгоритма имеется возможность контролировать правильность вычислений после каждого шага учитывая симметричность матриц  $T_{k-1,m}$  и  $S_{k-1,m}$ , а также других соотношений и определять ранг исходной матрицы по числу ненулевых значений вектора  $V_{k-1,m}$ .

Приведенные соотношения позволяют осуществить рекуррентное псевдообращение матриц  $C_{k-1}$  и  $D_{k-1}$  в выражении (5), и тем самым реализовать управляющие воздействия в адаптивной системе управления матричным объектом в условиях неопределенности.

#### Список литературы:

1. V.N.Afanas'ev, "Upravlenie neopredelenny'mi dinamicheskimi ob'ektami" [Control of uncertain dynamic objects], Moskva: Fizmatlit, 2008, 208 p. (in Russian).
2. A.A.Bobcov, A.A.Pyr'kin, "Adaptivnoe i robustnoe upravlenie s kompensaciey neopredelennostey. Uchebnoe posobie" [Adaptive and robust control with uncertainty compensation. Textbook], Sank Peterburg: NIU ITMO, 2013, 135 p. (in Russian).
3. V.O.Nikiforov, A.V.Ushakov, "Upravlenie v usloviyah neopredelennosti: chuvstvitel'nost', adaptaciya, robustnost'" [Management in uncertainty: sensuality, adaptation, robustness], Sank Peterburg: SPb GITMO (TU), 2002, 232 p. (in Russian).
4. H.Z.Igamberdiev, A.N.YUsupbekov, O.O.Zaripov, "Regulyarny'e metody' ocenivaniya i upravleniya dinamicheskimi ob'ektami v usloviyah neopredelennosti" [Regular methods for evaluating and managing dynamic objects in condition uncertainty], Tashkent: TashGTU, 2012, 320 p. (in Russian).
5. V.M. Kuncевич, "O reshenii zadachi dvumernoy diskretnoy fil'tracii (Sintez matrichny'h fil'trov)" [On solving the problem of two-dimensional discrete filtering (synthesis of matrix filters)] *Av.i Tel.*, no. 6, pp. 68-78, 1987. (in Russian).
6. E.V.Bodyanskiy, I.P.Pliss, "O reshenii zadachi upravleniya matrichny'm ob'ektom v usloviyah neopredelennosti" [On solving the problem of controlling a matrix object under conditions of uncertainty], *Av.i Tel.*, no. 2, pp. 175-178, 1990. (in Russian).
7. V.Antonov, V.Terehov, I.Tyukin, "Adaptivnoe upravlenie v tehniceskikh sistemah. Uchebnoe posobie" [Adaptive management in technical systems. Textbook]. Izd-vo: Izd-vo Sankt-Peterburgskogo universiteta, 2001, 244 p. (in Russian).
8. A.L.Bunich, N.N.Bahtadze, "Sintez i primeneniye diskretny'h sistem upravleniya s identifikatorom" [Synthesis and application of discrete control systems with an identifier], Moskva: Nauka, 2003, 232 p. (in Russian).
9. F.R.Gantmaher, "Teoriya matric" [Matrix theory], Moskva: Nauka, 1988, 552 p. (in Russian).
10. Dj.Golub, CH.Van Louch, "Matrichny'e vy'chisleniya" [Matrix calculations], Moskva: Mir, 1999, 548 p. (in Russian).
11. Horn R., Djonson CH. Matrichny'y analiz: Per. s angl. -M.: Mir., 1989. -655s.
12. Demmel' Dj. Vy'chislitel'naya lineynaya algebra. Teoriya i prilozheniya: Per. s angl. -M.: Mir, 2001 -430 s.
13. A.I.Jdanov, "Vvedeniye v metody' resheniya nekorrektny'h zadach" [Introduction to methods for solving incorrect problems], Izd. Samarskogo gos. aë'rokosmicheskogo un-ta, 2006, 87 p. (in Russian).
14. CH.Louison, R.Henson, "CHislennoye resheniye zadach metoda naimen'shih kvadratov" [Numerical solution of the problem of the least squares method], Moskva: Nauka. Gl. red. fiz.-mat. lit., 1986, 232 p. (in Russian).

Мамиров Уктам Фарходович – докторант кафедры «Системы обработки информации и управление», ТаиГТУ  
Тел.: (90) 900-56-25, E-mail.: [uktammamirov@gmail.com](mailto:uktammamirov@gmail.com).