

4-26-2023

POLE PLACEMENT OF LINEAR MULTIDIMENSIONAL SYSTEMS USING UNLIMITED RANK OUTPUT FEEDBACK

Jasur Usmonovich Sevinov

Tashkent State Technical University, Address: 2 Universitetskaya st., 100095, Tashkent city, Republic of Uzbekistan. E-mail: sevinovjasur@gmail.com,; sevinovjasur@gmail.com

Okila Khusanovna Boeva

Navoiy State Mining and Technological University, Address: 210100, 27 Galaba Str., Navoiy, Republic of Uzbekistan, E-mail: boyeva-oqila@mail.ru., boyeva-oqila@mail.ru

Follow this and additional works at: <https://ijctcm.researchcommons.org/journal>



Part of the [Controls and Control Theory Commons](#), and the [Process Control and Systems Commons](#)

Recommended Citation

Sevinov, Jasur Usmonovich and Boeva, Okila Khusanovna (2023) "POLE PLACEMENT OF LINEAR MULTIDIMENSIONAL SYSTEMS USING UNLIMITED RANK OUTPUT FEEDBACK," *Chemical Technology, Control and Management*: Vol. 2023: Iss. 2, Article 9.

DOI: <https://doi.org/10.59048/2181-1105.1449>

This Article is brought to you for free and open access by Chemical Technology, Control and Management. It has been accepted for inclusion in Chemical Technology, Control and Management by an authorized editor of Chemical Technology, Control and Management. For more information, please contact app-tgtu@mail.ru.



POLE PLACEMENT OF LINEAR MULTIDIMENSIONAL SYSTEMS USING UNLIMITED RANK OUTPUT FEEDBACK

Sevinov Jasur Usmonovich¹, Boeva Okila Khusanovna²

¹Tashkent State Technical University, Address: 2 Universitetskaya st., 100095, Tashkent city, Republic of Uzbekistan.

E-mail: sevinovjasur@gmail.com;

²Navoiy State Mining and Technological University, Address: 210100, 27 Galaba Str., Navoiy, Republic of Uzbekistan,

E-mail: boeva-okila@mail.ru.

Abstract: The problem of placing poles in linear multidimensional systems using a feedback matrix of unlimited rank is considered. The effect of output feedback of indefinite rank of the characteristic polynomial of a system with several variables is studied. The results are then used to obtain a recurrent pole placement algorithm without any restrictions on the rank of the output feedback matrix used. The algorithm is based on the pseudo-inverse concept of obtaining solutions to systems of linear equations using the least squares method and is computationally efficient.

Keywords: dynamic object, control system, feedback, linear multidimensional systems, poles and zeros.

Аннотация: Чекланмаган рангли тескари алоқа матрицаси ёрдамида чизиқли кўп ўлчамли тизимларда қутбларни жойлаштириш масаласи кўриб чиқилган. Бир неча ўзгарувчига эга бўлган тизимнинг характерли кўп ҳадига ноаниқ рангли тескари чиқиш алоқасининг таъсири ўрганилган. Натижалар, кейин фойдаланиладиган чиқиш тескари алоқа матрицаси рангига ҳеч қандай чекловларсиз қутбларни жойлаштиришнинг рекуррент алгоритмини олиш учун ишлатилади. Алгоритм чизиқли тенгламалар тизимларининг ечимларини энг кичик квадратлар усули ёрдамида олишнинг мавҳум тескари концепциясига асосланган ва ҳисоблашда самарали ҳисобланади.

Таянч сўзлар: динамик объект, бошқариш тизими, тескари алоқа, чизиқли кўп ўлчамли тизимлар, қутблар ва ноллар.

Аннотация: Рассмотрена задача размещения полюсов в линейных многомерных системах с использованием матрицы обратной связи неограниченного ранга. Исследовано влияние выходной обратной связи неопределенного ранга на характеристический многочлен системы с несколькими переменными. Результаты использованы для получения рекуррентного алгоритма размещения полюсов без каких-либо ограничений на ранг используемой матрицы выходной обратной связи. Алгоритм основан на псевдообратной концепции получения решений систем линейных уравнений по методу наименьших квадратов и является эффективным в вычислительном отношении.

Ключевые слова: динамический объект, система управления, обратная связь, линейные многомерные системы, полюсы, нули.

1. Введение

В последние годы значительное внимание уделяется проектированию линейных многомерных систем управления с использованием метода размещения полюсов. В результате было разработано несколько алгоритмов, которые проектируют контроллеры с обратной связью для достижения заданного набора полюсов системы. Один из таких алгоритмов, недавно разработанный в [1-6], обеспечивает присвоение полюсов с помощью обратной связи единичного ранга и включает преобразование системы с несколькими входами в «эквивалентную» систему с одним входом. Хотя это преобразование вводит некоторые степени свободы, которые в некоторых случаях могут быть использованы для точного размещения полюсов при неполной обратной связи по состоянию, очевидно, что при проектировании доступна большая свобода, если не накладываются ограничения на ранг используемой матрицы обратной связи.

В статье представлен рекуррентный алгоритм для достижения размещения полюсов без каких-либо ограничений на ранг используемых матриц обратной связи. Метод использует псевдообратную концепцию для получения решений систем линейных уравнений методом наименьших квадратов [6-8]. Сначала исследуется влияние обратной связи на характеристический полином многомерной системы, а затем выводится рекуррентный алгоритм.

2. Влияние обратной связи на характеристический полином

Рассмотрим полностью управляемую и полностью наблюдаемую многомерную систему:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) &= Cx(t),\end{aligned}\quad (1)$$

где $x(t)$ – вектор состояния из n -столбцов, $u(t)$ – входной вектор из m -столбцов, $y(t)$ – выходной вектор из l -столбцов, A , B и C – постоянные матрицы соответствующих размеров; а ранг C равен $l \leq n$. Разомкнутая передаточная функция $W_0(s)$ (матрица $l \times m$), связывающая выходы $Y(s)$ со входами $U(s)$, определяется выражением:

$$W_0(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{w_0(s)}{D_0(s)}, \quad (2)$$

где $w_0(s) = \text{Cadj}(sI - A)B$ – $l \times m$ матрица передаточной функции числителя с разомкнутым контуром, а $D_0(s) = \det(sI - A)$ – характеристический полином с разомкнутым контуром.

При применении выходной обратной связи, определяемой уравнением [1,9]:

$$u = v(t) - Ky(t), \quad (3)$$

где $v(t)$ – входной вектор внешней команды из m -столбцов, а K – матрица обратной связи на выходе из $m \times l$ -столбцов.

Тогда многомерная система уравнения становится:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= (A - BKC)x(t) + Bv(t), \\ y(t) &= Cx(t).\end{aligned}\quad (4)$$

Матрица $l \times m$ передаточной функции с замкнутым контуром $W_s(s)$, связывающая выходы $Y(s)$ со входами $V(s)$, имеет вид [1,3,10]:

$$W_s(s) = C(sI - A + BKC)^{-1}B = \frac{w_s(s)}{D_s(s)}, \quad (5)$$

где $w_s(s) = C \text{adj}(sI - A + BKC)B$ – матрица передаточной функции с замкнутым контуром $l \times m$, а $D_s(s) = \det(sI - A + BKC)$ – характеристический полином с замкнутым контуром.

Матрица BKC в уравнении (5) может быть записана в виде:

$$BKC = [b_1 \ b_2 \ \dots \ b_m] \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_m \end{bmatrix} C = \sum_{r=1}^m b_r k_r C, \quad (6)$$

где b_r – r -й столбец B , а k_r – r -я строка числа K . Следовательно, характеристический полином с замкнутым контуром может быть записан в виде:

$$D_s(s) = \det \left(sI - A + \sum_{r=1}^m b_r k_r C \right). \quad (7)$$

При использовании матричной идентичности:

$$e \operatorname{adj}(R)d = \det(R + de) - \det(R), \quad (8)$$

где R – матрица $(n \times n)$, а d и e – векторы с n -столбцами и n -строками, соответственно, уравнение (7) может быть выражено как:

$$D_3(s) = k_1 C \operatorname{adj} \left(sI - A + \sum_{r=2}^m b_r k_r C \right) b_1 + \det \left(sI - A + \sum_{r=2}^m b_r k_r C \right). \quad (9)$$

Далее получим:

$$D_3(s) = k_1 C \operatorname{adj} \left(sI - A + \sum_{r=2}^m b_r k_r C \right) b_1 + k_2 C \operatorname{adj} \left(sI - A + \sum_{r=3}^m b_r k_r C \right) b_2 + \\ + \det \left(sI - A + \sum_{r=3}^m b_r k_r C \right).$$

Следовательно, путем повторного применения результата уравнения (8) к определителю в правой части уравнения (9) характеристический полином с обратной связью может быть выражен следующим соотношением:

$$D_3(s) = k_1 \phi_1(s) b_1 + k_2 \phi_2(s) b_2 + \dots + k_q \phi_q(s) b_q + \dots + k_m \phi_m(s) b_m + \det(sI - A), \quad (10)$$

где $l \times n$ полиномиальная матрица $\phi_q(s) = C \operatorname{adj} \left(sI - A + \sum_{r=q+1}^m b_r k_r C \right)$ для $q = 1, 2, \dots, m-1$ и $\phi_m(s) = C \operatorname{adj}(sI - A)$.

Детерминант в правой части уравнения (10) представляет собой характеристический полином $D_0(s)$ с разомкнутым контуром [3,5,11,12]. Следовательно, требуемое соотношение между матрицей обратной связи K и характеристическим полиномом $D_3(s)$ может быть записано в виде:

$$D_3(s) = D_0(s) + k_1 \phi_1(s) b_1 + k_2 \phi_2(s) b_2 + \dots + k_m \phi_m(s) b_m. \quad (11)$$

3. Влияние вариации матрицы обратных связей на характеристический полином замкнутого контура

Следует отметить, что в уравнении (11) только одно слагаемое в правой (второй) части содержит вектор k_1 . Поменяв местами строки K и соответствующие столбцы B , можем получить выражения, аналогичные уравнению (11), так что конкретная строка K появляется только в одном члене. Таким образом, можем использовать эти уравнения для получения выражений в замкнутой форме для влияния изменения Δk_i в строке k_i из K на характеристический полином $D_3(s)$ с замкнутым контуром [4,13-16]. Например, при изменении Δk_1 в k_1 уравнение (11) принимает вид:

$$D_3(s) + \Delta D_3^{(1)}(s) = D_0(s) + (k_1 + \Delta k_1) \phi_1(s) b_1 + k_2 \phi_2(s) b_2 + \dots + k_m \phi_m(s) b_m, \quad (12)$$

из уравнений (11) и (12) получим:

$$\Delta D_3^{(1)}(s) = \Delta k_1 \phi_1(s) b_1. \quad (13)$$

Следовательно, для изменения Δk_i в строке k_i из K мы можем записать уравнение (13) в виде:

$$\Delta D_3^{(i)}(s) = \Delta k_i \phi_i^{(i)}(s) b_i, \quad (14)$$

где

$$\phi_i^{(i)}(s) = C \operatorname{adj} \left(sI - A + \sum_{r=1}^{i-1} b_r k_r C + \sum_{r=i+1}^m b_r k_r C \right), \quad (15)$$

здесь $\phi_1^{(i)}(s) - (l \times n)$ -полиномиальная матрица, которая является функцией всех строк K , кроме i -й строки k_i .

4. Рекуррентный алгоритм задания полюсов для многомерных систем

Далее используем уравнение (14) для вывода рекуррентного алгоритма размещения полюсов для систем с несколькими переменными. Алгоритм не делает никаких предположений относительно ранга матрицы обратной связи K .

Для системы со многими входами и многими выходами по уравнению (1) с характеристическим полиномом $D_0(s)$ с разомкнутым контуром требуется определить выходную матрицу обратной связи K так, чтобы система с замкнутым контуром по уравнению (4) имела полюса в некоторых желаемых положениях, заданных корнями его характеристического полинома $D_s(s)$ [7,15-18]. Начиная с начального значения $K = K_{нач}$ для матрицы обратной связи и $\Delta D_s(s) = D_s(s) - D_0(s)$, следуем процедуре, описанной в блок-схеме на рис. 1.

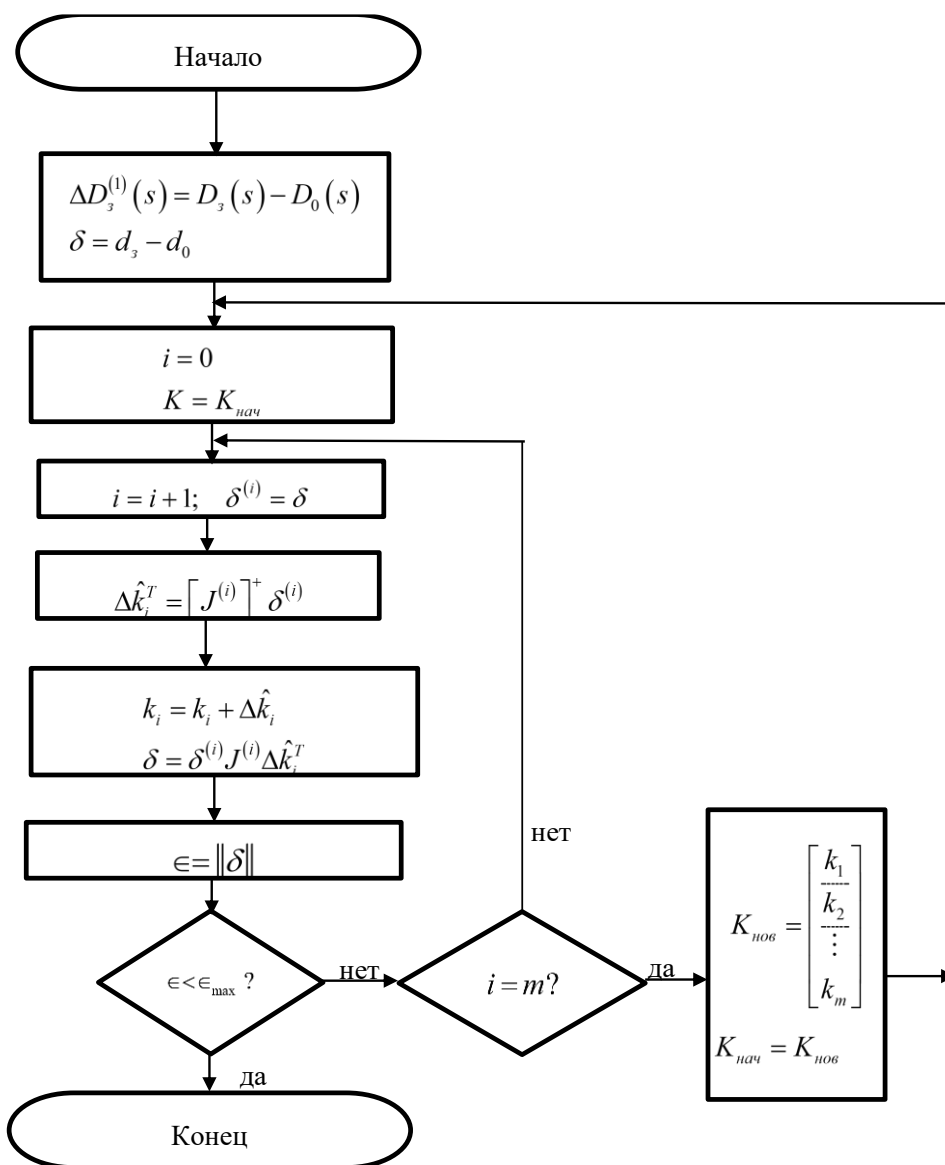


Рис. 1. Блок-схема алгоритма размещения полюсов.

На i -м шаге вычисляется $\phi_1^{(i)}(s)$ из уравнения (15).

Путем приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях s с обеих сторон [19], уравнение (14) можно записать в виде:

$$J^{(i)} \Delta k_i^T = \delta^{(i)}, \quad (16)$$

где $J^{(i)}$ – матрица коэффициентов размерности $(n \times l)$, полученная из l -столбцового полиномиального вектора $\phi_1^{(i)}(s)b_i$, а $\delta^{(i)}$ – вектор из n столбцов с коэффициентами $\Delta D_3^{(i)}(s)$, исключая коэффициент s^n .

Решение методом наименьших квадратов для Δk_i получается из уравнения (16) в виде [20-22]:

$$\Delta \hat{k}_i^T = [J^{(i)}]^+ \delta^{(i)}, \quad (17)$$

где $[J^{(i)}]^+$ – псевдообратное значение $J^{(i)}$.

Затем i -я строка из K становится $k_i + \Delta \hat{k}_i$, и

$$\Delta D_3^{(i+1)}(s) = \Delta D_3^{(i)}(s) - \Delta \hat{k}_i \phi_1^{(i)}(s) b_i, \text{ то есть } \delta^{(i+1)} = \delta^{(i)} - J^{(i)} \Delta \hat{k}_i^T.$$

Теперь можем приступить к вычислению $\Delta \hat{k}_{i+1}$ и обновлению $(i+1)$ -ой строки K . Когда все строки K были обновлены таким образом, получается лучшее приближение к желаемой матрице обратной связи (если она существует). Затем это значение используется для $K_{нач}$, и описанная выше процедура повторяется. Рекуррентный процесс прекращается [13,14,21], когда норма $\|\delta\|$ на любом шаге становится достаточно малой, если предположить, что решение существует.

5. Сходимость рекуррентного алгоритма

Теперь докажем, что рекуррентный алгоритм сходится. Начнем с разомкнутой многомерной системы, а именно $K_{нач} = 0$ или $k_1 = k_2 = \dots = k_m = 0$. На первом шаге решаем

$$J^{(1)} \Delta k_1^T = \delta^{(1)},$$

чтобы получить решение методом наименьших квадратов [22,23]:

$$\Delta k_1^T = [J^{(1)}]^+ \delta^{(1)},$$

с ошибкой:

$$\epsilon_1 = \|\delta^{(1)} - J^{(1)} \Delta \hat{k}_1^T\|,$$

удовлетворяющей условию:

$$\|\delta^{(1)} - J^{(1)} \Delta \hat{k}_1^T\| < \|\delta^{(1)} - J^{(1)} \Delta \hat{k}_1^T\| \forall \Delta k_1 \neq \Delta \hat{k}_1.$$

Предполагая, что $\Delta \hat{k}_1 \neq 0$, можем заменить $\Delta k_1 = 0$ в приведенном выше выражении:

$$\epsilon_1 < \|\delta^{(1)}\|.$$

Сформируем теперь $\delta^{(2)} = \delta^{(1)} - J^{(1)} \Delta \hat{k}_1^T$ обновление с k_1 по $k_1 + \Delta \hat{k}_1$ так, чтобы матрица обратной связи состояла из строк $k_1 + \Delta \hat{k}_1$, $k_1 = k_3 = \dots = k_m = 0$. На втором шаге решаем

$$J^{(2)} \Delta k_2^T = \delta^{(2)},$$

чтобы получить решение методом наименьших квадратов

$$\Delta \hat{k}_2^T = [J^{(2)}]^+ \delta^{(2)},$$

с ошибкой:

$$\epsilon_2 = \left\| \delta^{(2)} - J^{(2)} \Delta \hat{k}_2^T \right\|,$$

удовлетворяющей условию

$$\left\| \delta^{(2)} - J^{(2)} \Delta \hat{k}_2^T \right\| < \left\| \delta^{(2)} - J^{(2)} \Delta k_2^T \right\| \forall \Delta k_2 \neq \Delta \hat{k}_2^T,$$

т.е.

$$\left\| \delta^{(1)} - J^{(1)} \Delta \hat{k}_1^T - J^{(2)} \Delta \hat{k}_2^T \right\| < \left\| \delta^{(1)} - J^{(1)} \Delta \hat{k}_1^T - J^{(2)} \Delta k_2^T \right\| \forall \Delta k_2 \neq \Delta \hat{k}_2^T.$$

Предполагая, что $\Delta \hat{k}_2 \neq 0$ и подставляя $\Delta k_2 = 0$ в приведенное выше выражение, получаем:

$$\left\| \delta^{(1)} - J^{(1)} \Delta \hat{k}_1^T - J^{(2)} \Delta \hat{k}_2^T \right\| < \left\| \delta^{(1)} - J^{(1)} \Delta \hat{k}_1^T \right\|,$$

т.е. $\epsilon_2 < \epsilon_1$ что означает, что ошибка метода наименьших квадратов дополнительно уменьшается в конце второго шага.

Теперь можем обновить вторую строку матрицы обратной связи [19, 24], k_2 , до $k_2 + \Delta \hat{k}_2$, так что в конце второго шага матрица обратной связи будет состоять из строк $k_1 + \Delta \hat{k}_1$, $k_2 + \Delta \hat{k}_2$, $k_3 = \dots = k_m = 0$. Коэффициенты характеристического полинома, полученного с помощью этой матрицы обратной связи, задаются элементами вектора $\delta^{(3)} = \delta^{(2)} - J^{(2)} \Delta \hat{k}_2^T$.

Записав ϵ_i , $i=1, 2, \dots, m$ для ошибки наименьших квадратов в конце i -го шага, можем повторить приведенный выше аргумент для других строк матрицы обратной связи, в результате получим:

$$\epsilon_m < \epsilon_{m-1} < \epsilon_{m-2} < \dots < \epsilon_2 < \epsilon_1,$$

это подразумевает, что рекуррентный алгоритм сходится.

Следовательно, когда все строки матрицы обратной связи обновлены, получается лучшее приближение к желаемой матрице обратной связи, чем $K_{нач}$. Затем это значение матрицы обратной связи можно установить в качестве начального значения, и процесс можно повторить, чтобы получить еще лучшее приближение (если оно существует).

При доказательстве сходимости рекуррентного алгоритма предположим, что на i -м шаге $\Delta \hat{k}_i \neq 0$. Если $\Delta \hat{k}_i = 0$, то это означает, что на этом шаге не существует значения k_i , которое приводит к уменьшению ошибки наименьших квадратов. В таком случае просто переходим к следующей строке матрицы обратной связи [24,25]. Однако, если $\Delta \hat{k}_i = 0$ для всех i :

- (i) решение было достигнуто, или
- (ii) достигнут локальный минимум, или
- (iii) решения не существует.

В некоторых случаях можно избежать локального минимума, начав с другого значения $K_{нач}$. Однако, в целом, из-за нелинейного характера задачи, нельзя гарантировать, что алгоритм во всех случаях сходится к решению (если таковое существует).

Следует отметить, что для случая с одним входом (одним выходом) матрица K становится l -строчным (m -столбцов) вектором k .

6. Размещение полюса с использованием индивидуальных спецификаций полюса

В рекуррентном алгоритме размещения полюсов с обратной связью выполняются путем присвоения коэффициентов характеристического полинома с обратной связью. Этот подход используется в большинстве алгоритмов размещения полюсов или модального управления и имеет преимущество вычислительной простоты [1,5,18].

Однако довольно часто полюса очень чувствительны к изменениям коэффициентов характеристического полинома, и, если коэффициенты характеристического полинома замкнутого контура не выполняются точно, полюса замкнутого контура могут сильно отличаться

от их желаемых значений. Чтобы избежать этой проблемы, можем специфицировать алгоритм рекуррентного размещения полюсов [5,7] в терминах спецификаций отдельных полюсов.

6.1. Технические характеристики реальных полюсов

Будем рассматривать отдельно случаи вещественных, комплексно сопряженных и нескольких полюсов.

Но сначала перепишем уравнение размещения полюсов (14) как

$$\Delta D_3^{(i)}(s) = \Delta k_i \psi_1^{(i)}(s), \quad (18)$$

где $\psi_1^{(i)}(s)$ – полиномиальный вектор из l столбцов $\phi_1^{(i)}(s)b_i$.

Если желательно иметь действительный полюс с обратной связью в точке $s = \lambda_R$, уравнение присвоения полюсов (18) должно удовлетворяться для этой спецификации полюса, что дает одно линейное уравнение для l неизвестных элементов $\Delta k_{i1}, \Delta k_{i2}, \dots, \Delta k_{il}$, вектора Δk_i , т.е.

$$\Delta D_3^{(i)}(\lambda_R) = \Delta k_i \psi_1^{(i)}(\lambda_R).$$

Более того, поскольку $s = \lambda_R$ является корнем желаемого характеристического полинома $D_3(s)$ с замкнутым контуром, $D_3(s)$ должно обращаться в нуль в точке $s = \lambda_R$. Следовательно, начальное значение $D_3(\lambda_R)$ определяется выражением

$$\Delta D_3^{(1)}(\lambda_R) = D_3(\lambda_R) - D_0(\lambda_R) = -D_0(\lambda_R).$$

6.2. Комплексно-сопряженные характеристики полюса

Для пары комплексно-сопряженных полюсов в точке $s = \lambda_s, s = \bar{\lambda}_s$ нам достаточно рассмотреть действительный и мнимый вклады одного из полюсов. Следовательно, (18) дает:

$$\operatorname{Re}\{\Delta D_3^{(i)}(\lambda_s)\} = \Delta k_i \operatorname{Re}\{\psi_1^{(i)}(\lambda_s)\},$$

$$\operatorname{Im}\{\Delta D_3^{(i)}(\lambda_s)\} = \Delta k_i \operatorname{Im}\{\psi_1^{(i)}(\lambda_s)\},$$

и, поскольку $D_3(s)$ должно равняться нулю в $s = \lambda_s$ и $s = \bar{\lambda}_s$, начальные значения $\Delta D_3(s)$ в $s = \lambda_s$ задаются следующим образом:

$$\operatorname{Re}\{\Delta D_3^{(1)}(\lambda_s)\} = \operatorname{Re}\{D_3(\lambda_s)\} - \operatorname{Re}\{D_0(\lambda_s)\} = -\operatorname{Re}\{D_0(\lambda_s)\},$$

$$\operatorname{Im}\{\Delta D_3^{(1)}(\lambda_s)\} = \operatorname{Im}\{D_3(\lambda_s)\} - \operatorname{Im}\{D_0(\lambda_s)\} = -\operatorname{Im}\{D_0(\lambda_s)\}.$$

6.3. Характеристики нескольких полюсов

Для вещественного полюса кратности μ при $s = \lambda_K$ имеем μ уравнений, полученных из (18) и его $\mu - 1$ производных; а именно:

$$\begin{aligned} \Delta D_3^{(i)}(\lambda_K) &= \Delta k_i \psi_1^{(i)}(\lambda_K), \\ \left[\frac{d}{ds} \{ \Delta D_3^{(i)}(s) \} \right]_{s=\lambda_K} &= \Delta k_i \left[\frac{d}{ds} \{ \psi_1^{(i)}(s) \} \right]_{s=\lambda_K}, \\ \left[\frac{d^2}{ds^2} \{ \Delta D_3^{(i)}(s) \} \right]_{s=\lambda_K} &= \Delta k_i \left[\frac{d^2}{ds^2} \{ \psi_1^{(i)}(s) \} \right]_{s=\lambda_K}, \\ &\dots\dots\dots \\ \left[\frac{d^{\mu-1}}{ds^{\mu-1}} \{ \Delta D_3^{(i)}(s) \} \right]_{s=\lambda_K} &= \Delta k_i \left[\frac{d^{\mu-1}}{ds^{\mu-1}} \{ \psi_1^{(i)}(s) \} \right]_{s=\lambda_K}. \end{aligned}$$

Также $D_3(s)$ и его производные $\mu - 1$ должны обращаться в нуль на $s = \lambda_K$, что дает начальные значения:

$$\Delta D_3^{(1)}(\lambda_K) = -D_0(\lambda_K),$$

$$\left[\frac{d}{ds} \{ \Delta D_3^{(1)}(s) \} \right]_{s=\lambda_K} = - \left[\frac{d}{ds} \{ D_0(s) \} \right]_{s=\lambda_K},$$

$$\left[\frac{d^2}{ds^2} \{ \Delta D_3^{(1)}(s) \} \right]_{s=\lambda_K} = - \left[\frac{d^2}{ds^2} \{ D_0(s) \} \right]_{s=\lambda_K},$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\left[\frac{d^{\mu-1}}{ds^{\mu-1}} \{ \Delta D_3^{(1)}(s) \} \right]_{s=\lambda_K} = - \left[\frac{d^{\mu-1}}{ds^{\mu-1}} \{ D_0(s) \} \right]_{s=\lambda_K}.$$

Для комплексно-сопряженных множественных полюсов действительная и мнимая части дают в общей сложности 2μ уравнений и 2μ начальных значений.

Каждая спецификация полюса (действительная, комплексная или кратная) дает одно линейное уравнение в l неизвестных элементах вектора Δk_i . Следовательно, если зададим полюса с обратной связью в $s = \lambda_1, s = \lambda_2, \dots, s = \lambda_n, p \leq n$ то получим p уравнений в l неизвестных элементах вектора Δk_i , который можно записать как

$$L^{(i)} \Delta k_i^T = \sigma^{(i)}, \quad (19)$$

где $L^{(i)}$ - матрица $p \times l$

$$\psi_1^{(i)}(s) \Big|_{s=\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p},$$

и $\sigma^{(i)}$ представляет собой вектор p -столбца, полученный из

$$\Delta D_3^{(1)}(s) \Big|_{s=\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p}.$$

Ряды $L^{(i)}$ и соответствующие элементы $\sigma^{(i)}$ сформированы, как показано выше.

Рекуррентный алгоритм из раздела 4 теперь можно использовать для вычисления матрицы обратной связи K , которая удовлетворяет спецификациям полюсов с обратной связью. Следует отметить, что решение для Δk_i на i -м шаге теперь удовлетворяет уравнению (19), а, следовательно, и характеристики полюсов по методу наименьших квадратов. Следовательно, малое значение $\|\sigma^{(i)}\|$ означает, что достигнутые полюсные положения близки к их желаемым значениям с обратной связью. Напротив, не всегда можем заключить то же самое для небольшого значения $\|\delta^{(i)}\|$ по той причине, что положения полюсов часто очень чувствительны к небольшим изменениям коэффициентов характеристических полиномов некоторых систем.

8. Заключение

Представлен рекуррентный метод задания полюсов многомерных систем с использованием обратной связи неограниченного ранга. Он основан на некоторых новых результатах о влиянии обратной связи на характеристические полиномы с обратной связью многомерных систем. Преимущество этого метода состоит в том, что он обладает большим количеством степеней свободы, чем методы обратной связи с единичным рангом, поскольку используемая матрица выходной обратной связи имеет $(m \times l)$ независимых переменных по сравнению с $(m+l-1)$ в обратной связи с единичным рангом. Это упрощает задачу точного размещения полюсов, особенно, когда $(m+l-1) < n \leq (m \times l)$.

References:

1. Grigor'ev, V.V., ZHuravlyova, N.V., Luk'yanova, G.V., Sergeev, K.A. (2007). *Sintez sistem avtomaticheskogo upravleniya metodom modal'nogo upravleniya [Synthesis of automatic control systems by modal control method]*. S-Pb: SPbGU ITMO. 143 p. (in Russian).
2. Dorf, R., Bishop, R. (2002). *Sovremennye sistemy upravleniya [Modern control systems]*. M.: Laboratoriya Bazovykh znaniy. 832 p. (in Russian).

3. Andreev, YU.N. (1976). *Upravlenie konechnomernymi linejnymi ob'ektami [Management of finite-dimensional linear objects]*. M.: Nauka, 424 p. (in Russian).
4. Zubov, N.E., Mikrin, E.A., Ryabchenko, V.N. (2016). *Matrichnye metody v teorii i prakticheskie sistem avtomaticheskogo upravleniya letatel'nykh apparatov [Matrix Methods in Theory and Practical Aircraft Automatic Control Systems]*. Moskva: Izdatel'stvo MGTU im. N.E.H.Baumana. 666 p. (in Russian).
5. Misrikhanov, M.SH., Ryabchenko, V.N. (2011). Razmeshhenie polyusov v bol'shikh dinamicheskikh sistemakh s mnogimi vkhodami i vykhodami [Pole placement in large dynamic systems with many inputs and outputs]. *Doklady Rossijskoj akademii nauk*, 434(4). 1-3. (in Russian).
6. Misrikhanov, M.SH. (2007). *Invariantnoe upravlenie mnogomernymi sistemami. Algebraicheskij podkhod [Invariant control of multidimensional systems. Algebraic approach]*. M.: Nauka, 398 p. (in Russian).
7. Ushakov, A.V. (2002). Obobshhennoe modal'noe upravleniya [Generalized modal control]. *Izv. vuzov. Priborostroenie*. 43(3), 8-15.
8. Yusupbekov, N.R., Igamberdiev, H.Z., Sevinov, J.U. (2020). Formalization Of Identification Procedures Of Control Objects As A Process In The Closed Dynamic System And Synthesis Of Adaptive Regulators. *Journal of Advanced Research in Dynamical and Control Systems*, 12(6s), 77-88. DOI:10.5373/JARDCS/V12SP6/SP20201009.
9. Sevinov, J.U., Boeva, O. (2022). Synthesis algorithms for adaptive-modal control systems for technological objects with delays. *AIP Conference Proceedings* 2647, 030007 (2022). <https://doi.org/10.1063/5.0104891>.
10. Igamberdiev, H.Z., Boeva, O.H., Sevinov, J.U. (2020). Sustainable algorithms for selecting feedback in dynamic object management systems. *Journal of Advanced Research in Dynamical and Control Systems*, 12(7 Special Issue), 2162-2166.
11. Zubov, N.E., Mikrin, E.A., Misrikhanov, M.Sh., Ryabchenko, V.N. (2016). Output Control of the Spectrum of a Descriptor Dynamical System. *Doklady Mathematics*, 93(3), 259-261.
12. Igamberdiev, H.Z., Sevinov, J.U., Boeva, O.H. (2021). Algorithms for modal control synthesis in multi-dimensional dynamic system. *Chemical Technology, Control and Management*, 5(7), 45-51. DOI: <https://doi.org/10.51346/tstu-02.21.5-77-0040>.
13. Mamirov, U.F. (2021). *Regulyarnyj sintez sistem adaptivnogo upravleniya neopredelennymi dinamicheskimi ob'ektami [Regular synthesis of adaptive control systems for uncertain dynamic objects]*. Tashkent: «Bilim va intellektual salohiyat». 215 p. (in Russian).
14. Igamberdiev, KH.Z., Sevinov, ZH.U., Zaripov, O.O. (2014). *Regulyarnye metody i algoritmy sinteza adaptivnykh sistem upravleniya s nastraivaemymi modelyami [Regular methods and algorithms for the synthesis of adaptive control systems with customizable models]*. T.: TashGTU. 160 p. (in Russian).
15. Tyutikov, V.V., Tararykin, S.V. (2006). *Robastnoe modal'noe upravlenie tekhnologicheskimi ob'ektami [Robust Modal Control of Technological Objects]*. Ivanovo: IGEHU. 256 p. (in Russian).
16. Yusupbekov, N.R., Igamberdiev, H.Z., Sevinov, J.U. (2020). Formalization of Identification Procedures of Control Objects as a Process in the Closed Dynamic System and Synthesis of Adaptive Regulators. *Journal of Advanced Research in Dynamical and Control Systems*, 12(06-Special Issue), 77-88. DOI: 10.5373/JARDCS/V12SP6/SP20201009.
17. Sevinov, ZH.U., Boeva, O.KH. (2021). *Programmnoe obespechenie dlya resheniya zadach modal'nogo upravleniya s ispol'zovaniem optimal'nogo algoritma tsifrovogo regul'yatora sostoyanij [Software for solving problems of modal control using the optimal algorithm of the digital state controller]*. DGU 11396. 22.04.2021.
18. Sevinov, J.U., Boeva, O.H. (2020). Adaptive pole placement algorithms for of non-minimum-phase stochastic systems. *Chemical technology. Control and management*, 5-6, 38-43.
19. Gantmakher, F.R. (1988). *Teoriya matrits [Matrix theory]*. M.: Nauka. Fiz.-mat. lit. 552 p. (in Russian).
20. Tikhonov, A.N., Arsenin, V.YA. (1986). *Metody resheniya nekorrektnykh zadach [Methods for solving ill-posed problems]*. M.: Nauka. 288 p. (in Russian).
21. Morozov, V.A. (1987). *Regulyarnye metody resheniya nekorrektno postavlennykh zadach [Regular methods for solving ill-posed problems]*. M.: Nauka. (in Russian).
22. Vajnikko, G.M., Veretennikov, A.YU. (1986). *Iteratsionnye protsedury v nekorrektnykh zadachakh [Iterative procedures in ill-posed problems]*. M.: Nauka. (in Russian).
23. Voevoda, A.A., Voronov, V.V. (2011). Modal'nyj sintez regul'yatorov ponizhennogo poryadka metodom differentsirovaniya kharakteristicheskogo polinoma [Modal synthesis of low-order controllers by the method of differentiation of the characteristic polynomial]. *Sb. nauch. tr. NGTU*. 1(63), 3-12. (in Russian).
24. Kochetkov, S.A., Utkin, V.A. (2014). Minimizatsiya normy matritsy obratnoj svyazi v zadachakh modal'nogo upravleniya [Minimizing the Norm of the Feedback Matrix in Modal Control Problems]. *AiT*. 2, 72-105. (in Russian).
25. Jie, Cui, Gangtie, Zheng. (2020). An iterative state-space component modal synthesis approach for damped systems. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 142 (2020) 106558, 1-28.